ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN DIỄN

PHÉP PHÂN HOẠCH TẬP HOWPJVAF MỘT SỐ ỨNG DỤNG TRONG TOÁN SƠ CẤP

THÁI NGUYÊN 2015

Mục lục

Muc luc 1

Lời nói đầu 3

1 Phép phân hoạch tập hợp **5**

1.1 Phép phân hoach tập hợp và quan hệ tương đương 5

1.2 Số Bell và số Stirling loại hai 10

1.3 Một số công thức tính hàm phân hoạch tập hợp 18

2 Một số ứng dụng trong toán sơ cấp **22**

2.1 Phân hoạch chẵn, lẻ và ứng dụng trong toán sơ cấp 22

2.2 Một số ứng dụng giải toán tổ hợp và hình học sơ cấp . . . 27

2.3 Phân hoach số và ứng dụng trong toán sơ cấp 32

Kết luận 38

Tài liệu tham khảo 39

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin gửi lời biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến PGS.TS Lê Thị Thanh Nhàn đã giúp tôi hoàn thành bản luận văn này. Khi bắt đầu nhận đề tài thực sự tôi cảm nhận đề tài mang nhiều nội dung mới mẻ. Hơn nữa với vốn kiến thức ít ỏi cùng với kinh nghiệm làm đề tài lớn không nhiều nên tôi chưa thực sự tự tin để tiếp cận đề tài. Mặc dù rất bận rộn trong công việc nhưng Cô vẫn dành nhiều thời gian và tâm huyết trong việc hướng dẫn, động viên khuyến khích tôi trong suốt thời gian tôi thực hiện đề tài. Trong quá trình tiếp cận đề tài đến quá trình hoàn thiện luận văn Cô luân tận tình chỉ bảo và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi. Cho đến bây giờ luận văn thạc sĩ của tôi đã được hoàn thành, xin cảm ơn Cô đã đôn đốc nhắc nhở và giúp đỡ tôi hết mình.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Khoa toán-Tin và phòng Đào tạo của trường Đại học Khoa học-Đại học Thái Nguyên. Tôi xin trân trọng cảm ơn các Thầy, Cô đã tận tình truyền đạt những kiến thức quí báu cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn đến gia đình, bạn bè, những người đã không ngừng động viên, hỗ trợ tạo mọi điều kiện cho tôi. Vì năng lực bản thân cũng như thời gian còn hạn chế, luận văn chắc chắn không thể tránh khỏi những sai sót. Tác giả rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến nhận xét của Thầy, Cô để bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Nam Định, ngày 15, tháng 4, năm 2015

Học viên

Nguyễn Văn Diễn

LỜI NÓI ĐẦU

Lí thuyết phân hoạch tập hợp có một lịch sử lâu dài (được quan tâm từ Thế kỉ 19), cho đến nay đây vẫn là một chủ đề nghiên cứu rất hấp dẫn và thời sự. Lí thuyết phân hoạch tập hợp đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học như Tổ hợp, Lí thuyết Lie, Lí thuyết biểu diễn, Toán vật lí, Lí thuyết các hàm đặc biệt .... Vì tầm quan trọng của nó trong những ứng dụng khác nhau, các nhà toán học đã nỗ lực tìm công thức tính số phân hoạch một tập hợp. Một trong số những công thức tính số phân hoạch đầu tiên thuộc về Bell trong một bài báo trên tạp chí nổi tiếng Annals of Mathematics năm 1934 và tiếp tục phát triển trong một bài báo khác trên Annals of Mathematics công bố năm 1938. Số phép phân hoạch trên một tập hợp n phần tử được gọi là *số Bell* thứ n để ghi nhận đóng góp to lớn của nhà toán học tên tuổi Eric Temple Bell (1883-1960), số này được kí hiệu là B_n. Nhiều công thức khác để tính số phân hoạch tập hợp n phần tử như công thức được đưa ra bởi G. C. Rota trong bài báo "The Number of Partitions of a Set" trên Amer. Math. Monthly năm 1964, công thức của W. F. Lunnon, P. Pleasants, M. N. Stephens trong bài báo "Arithmetic Properties of Bell Numbers to a Composite Modulus" trên Acta Arith. năm 1979, ... Ngày nay việc nghiên cứu số Bell vẫn rất được quan tâm, thể hiện trong công trình năm 2013 của E. D. Knuth tổng kết 2000 năm về toán Tổ hợp (xem [K]), của D. Berend và T. Tassa năm 2010 (xem [BT]), của D. Callan năm 2006 (xem [Ca]), ...

Mục đích của luận văn là nghiên cứu lí thuyết phân hoạch tập hợp, một số công thức tính số Bell B_n và ứng dụng để giải một số dạng toán sơ cấp, đặc biệt là toán tổ hợp.

Luận văn gồm 2 chương. Trong Chương 1, trước hết chúng tôi trình bày khái niệm phép phân hoạch tập hợp, chỉ ra sự liên quan chặt chẽ giữa phép phân hoạch tập hợp và quan hệ tương đương trên cùng một tập hợp. Tiết 1.2 dành để chứng minh một số công thức tính số phân hoạch, số Stirling loại 2 và đưa ra một số công thức truy hồi để tính số Bell. Chương này cũng giới thiệu về tam giác Bell, đó là thành quả của việc tính toán dựa trên các công thức có được. Trong Chương 2, chúng tôi trình bày một số ứng dụng của lí thuyết phân hoạch trong việc giải một số dạng toán sơ cấp, đặc biệt là đối với những bài toán trong đại số tổ hợp hay hình học sơ cấp. Chúng tôi cũng đưa ra lời giải một số bài toán liên quan đến nghiệm của phương trình, tính xác suất của biến cố hay bài toán phân hoạch của tập hợp số, đặc biệt là những bài toán phân hoạch đa giác thành những tam giác trong hình học sơ cấp.

Chương 1

Phép phân hoạch tập hợp

Mục tiêu của Chương 1 là trình bày khái niệm phân hoạch tập hợp, mối quan hệ giữa phân hoạch tập hợp và quan hệ tương đương, tính chất cơ sở của số Bell và chứng minh một số công thức tính số Bell, tức là công thức tính hàm phân hoạch tập hợp.

1.1 Phép phân hoach tập hợp và quan hệ tương đương

Trong suốt tiết này luôn giả thiết X là một tập hợp khác rỗng. Mục tiêu của tiết này là giới thiệu khái niệm phép phân hoạch tập hợp và mối liên hệ giữa các phép phân hoạch của tập X với các quan hệ tương đương trên tập X.

1.1.1 Định nghĩa. Ta gọi *một phép phân hoạch tập* X (hay *một sự chia lớp trên* X) là một cách chia X thành một họ các tập con khác rỗng $\{X_i\}_{i\in I}$ sao cho $X_i \cap X_j = \emptyset$ với mọi $i, j \in I, i \neq j$ và $X = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$. Nếu $\{X_i\}_{i\in I}$ là một phân hoạch tập X thì mỗi tập con X_i được gọi là một *khối* của phân hoạch; nếu I gồm k phần tử thì ta nói phân hoạch đó gồm k khối.

1.1.2 Ví dụ. (i) Nếu $X = \{a\}$ thì X có đúng một phân hoạch, đó là phân hoạch thành một khối X.

(ii) Nếu $X = \{a, b\}$ thì X có hai phân hoạch, phân hoạch thứ nhất thành một khối X; phân hoạch thứ hai gồm hai khối $\{a\}, \{b\}$.
(iii) Nếu $X = \{a, b, c\}$ thì có 5 phép phân hoạch tập X, đó là

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\};\ \{\{a, b\}, \{c\}\};\ \{\{a, c\}, \{b\}\};\ \{\{b, c\}, \{a\}\};\ \{\{a, b, c\}\},$$

trong đó có một phân hoạch thành 1 khối, ba phân hoạch thành 2 khối, và một phân hoạch thành 3 khối.
(iv) Nếu $X = \{a, b, c, d\}$ thì có 15 phép phân hoạch tập X, đó là

$$\{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\};\ \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\};\ \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}$$

$$\{\{b, c\}, \{a\}, \{d\}\};\ \{\{b, d\}, \{a\}, \{c\}\};\ \{\{c, d\}, \{a\}, \{b\}\}$$

$$\{\{a, b, c\}, \{d\}\};\ \{\{a, b, d\}, \{c\}\};\ \{\{a, c, d\}, \{b\}\}$$

$$\{\{b, c, d\}, \{a\}\};\ \{\{a, b\}, \{c, d\}\};\ \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$$

$$\{\{a, d\}, \{b, c\};\ \{a, b, c, d\}; \{abcd\}.$$

Cụ thể:
Tập hợp gồm 4 phần tử có 1 phân hoạch thành 1 khối là $\{abcd\}$
Tập hợp gồm 4 phần tử có 1 phân hoạch thành 4 khối là $\{a, b, c, d\}$
Tập hợp gồm 4 phần tử có 7 phân hoạch thành 2 khối là
$\{\{a, b, c\}, \{d\}\};\ \{\{a, b, d\}, \{c\}\};\ \{\{a, c, d\}, \{b\}\};\ \{\{b, c, d\}, \{a\}\};$
$\{\{a, b\}, \{c, d\}\};\ \{\{a, c\}, \{b, d\}\};\ \{\{a, d\}, \{b, c\}\}$
Tập hợp gồm 4 phần tử có 6 phân hoạch thành 3 khối là
$\{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\};\ \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\};\ \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\};$
$\{\{b, c\}, \{a\}, \{d\}\};\ \{\{b, d\}, \{a\}, \{c\}\};\ \{\{c, d\}, \{a\}, \{b\}\}$

1.1.3 Ví dụ. Chú ý rằng phân hoạch không phụ thuộc vào thứ tự của các khối. Chẳng hạn, trong Ví dụ 1.1.2(iii) với $X = \{a, b, c\}$, phép phân hoạch $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ và $\{\{b\}, \{a\}, \{c\}\}$ là như nhau; phép phân hoạch $\{\{a, c\}, \{b\}\}$ và $\{\{b\}, \{a, c\}\}$ là như nhau.

Thực tế, có nhiều bài toán được quy về bài toán phân hoạch tập hợp như các bài toán về xác xuất thống kê, về tổ hợp đồ thị, ...

1.1.4 Ví dụ. Cho Ω là không gian mẫu của một phép thử nào đó. Khi đó hệ biến cố gồm n biến cố $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ được gọi là 1 phân hoạch của không gian mẫu Ω nếu $A_i \cap A_j = \emptyset$, với mọi $i, j = 1, 2, 3 \ldots n$ và $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$. Hệ biến cố trên còn được gọi là hệ đầy đủ và đôi một xung khắc với nhau. Khi đó với B là một biến cố bất kì trong phép thử, ta có công thức đầy đủ và công thức Bayes như sau:
(i) $P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)P(B/A_n)$
(ii) $P(A_i/B) = \dfrac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}$.

Tiếp theo, chúng ta trình bày mối quan hệ giữa các phép phân hoạch tập X với các quan hệ tương đương trên X. Nhắc lại rằng một tập con khác rỗng của tích Descartes $X \times X$ được gọi là một *quan hệ* (hai ngôi) trên X. Ta thường kí hiệu các quan hệ bằng các chữ $R, S, T, \Omega, \ldots$ hoặc các kí hiệu $\sim, \leqslant, \geq, \ldots$. Cho Ω là một quan hệ hai ngôi trên X. Nếu $(a, b) \in \Omega$ thì ta viết là $a\Omega b$ và ta nói *a quan hệ với b* (theo quan hệ Ω). Dưới đây là một số tính chất quan trọng mà một quan hệ Ω có thể có
(i) *Phản xạ*: $a\Omega a$ với mọi $a \in X$.
(ii) *Đối xứng*: Nếu $a\Omega b$ thì $b\Omega a$ với mọi $a, b \in X$.
(iii) *Phản đối xứng*: Nếu $a\Omega b$ và $b\Omega a$ thì $a = b$ với mọi $a, b \in X$.
(iv) *Bắc cầu*: Nếu $a\Omega b$ và $b\Omega c$ thì $a\Omega c$ với mọi $a, b, c \in X$. Chẳng hạn, với $X = \{1, 2, 3, 4\}$, *quan hệ chia hết*

$$\Omega = \{(a, b) \in X \times X \mid a \text{ là ước của } b\}$$

có các tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu. Ta cũng viết quan hệ chia hết này bằng cách chỉ ra một thuộc tính đặc trưng như sau: $a\Omega b$ nếu và chỉ nếu a là ước của b với mọi $a, b \in X$. Ta cũng có thể viết quan hệ này bằng cách liệt kê như sau

$$\Omega = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}.$$

1.1.5 Định nghĩa. Một quan hệ trên X được gọi là *quan hệ tương đương* nếu nó phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Theo truyền thống, quan hệ tương đương thường được kí hiệu bởi $\sim$. Giả sử $\sim$ là quan hệ tương đương trên X. Với mỗi $a \in X$, ta gọi *lớp tương đương* của a, kí hiệu bởi $\mathrm{cl}(a)$ (hay $\overline{a}$, hoặc $[a]$) là tập các phần tử của X quan hệ với a, tức là

$$\mathrm{cl}(a) = \{b \in X \mid \ b \sim a\}.$$

Tập các lớp tương đương được gọi là *tập thương* của X theo quan hệ tương đương $\sim$ và được kí hiệu bởi $X/\sim$. Như vậy

$$X/\sim \ = \ \{\mathrm{cl}(a) \mid a \in X\}.$$

Chú ý rằng $a \sim b$ khi và chỉ khi $\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(b)$ với mọi $a, b \in X$. Thật vậy, giả sử $a \sim b$. Cho $x \in \mathrm{cl}(a)$, tức là $x \sim a$. Do $\sim$ có tính bắc cầu nên $x \sim b$. Vì thế $x \in \mathrm{cl}(b)$. Do đó $\mathrm{cl}(a) \subseteq \mathrm{cl}(b)$. Tương tự, $\mathrm{cl}(b) \subseteq \mathrm{cl}(a)$. Ngược lại, giả sử $\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(b)$. Do $\sim$ có tính phản xạ nên $a \in \mathrm{cl}(a)$. Vì thế $a \in \mathrm{cl}(b)$, tức là $a \sim b$.

1.1.6 Ví dụ. Cho $m \geq 1$ là một số tự nhiên. Ta định nghĩa quan hệ $\equiv \pmod m$ trên $\mathbb{Z}$ như sau: với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \pmod m$ khi và chỉ khi $a - b$ là bội của m. Quan hệ này được gọi là *quan hệ đồng dư theo môđun m*. Quan hệ này là phản xạ, đối xứng và bắc cầu và không phản xứng. Do đó nó là quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$. Nếu $a \equiv b \pmod m$ thì ta đọc là *a đồng dư với b theo môđun m*. Với mỗi $a \in \mathbb{Z}$, lớp tương đương của a thường được kí hiệu bởi $\overline{a}$ và gọi là *lớp thặng dư theo môđun m* với đại diện là a. Tập thương của $\mathbb{Z}$ theo quan hệ này được kí hiệu bởi $\mathbb{Z}_m$ và được gọi là *tập các lớp thặng dư theo môđun* m hay *tập các số nguyên mođunlô* m. Cho $a \in \mathbb{Z}$. Viết $a = mq + r$ với $0 \leqslant r \leqslant m - 1$. Khi đó $a - r$ là bội của m, tức là $a \equiv r \pmod{m}$. Suy ra $\overline{a} = \overline{r}$. Hơn nữa, nếu $r \neq s$ là các số tự nhiên sao cho $r, s \leqslant m - 1$ thì $r - s$ không là bội của m. Do đó $\overline{r} \neq \overline{s}$. Vậy tập thương $\mathbb{Z}_m$ gồm đúng m phần tử, đó là $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$.

1.1.7 Mệnh đề. *Cho* $\sim$ *là quan hệ tương đương trên* X. *Khi đó.*
(i) $\mathrm{cl}(a) \neq \emptyset$ *với mọi* $a \in X$*;*
(ii) $X = \bigcup\limits_{a \in X} \mathrm{cl}(a)$*;*
(iii) Nếu $\mathrm{cl}(a) \neq \mathrm{cl}(b)$ *thì* $\mathrm{cl}(a) \cap \mathrm{cl}(b) = \emptyset$ *với mọi* $a, b \in X$.

Chứng minh. (i), (ii). Với mỗi $a \in X$, do tính phản xạ nên ta luôn có $a \sim a$. Vì thế $a \in \mathrm{cl}(a)$. Do đó $\mathrm{cl}(a) \neq \emptyset$ và $X = \bigcup\limits_{a \in X} \mathrm{cl}(a)$.
(iii). Giả sử $\mathrm{cl}(a) \cap \mathrm{cl}(b) \neq \emptyset$. Chọn $c \in \mathrm{cl}(a) \cap \mathrm{cl}(b)$. Ta có $a \sim c$ và $c \sim b$. Giả sử $x \in \mathrm{cl}(a)$. Khi đó $x \sim a$. Do tính chất bắc cầu ta có $x \sim b$. Vì thế $x \in \mathrm{cl}(b)$. Suy ra $\mathrm{cl}(a) \subseteq \mathrm{cl}(b)$. Tương tự, $\mathrm{cl}(a) \supseteq \mathrm{cl}(b)$. Do đó $\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(b)$. $\square$

Định lí sau đây là kết quả chính của tiết này, cho ta mối quan hệ giữa các phép phân hoạch với các quan hệ tương đương.

1.1.8 Định lý. *Nếu* $\sim$ *là một quan hệ tương đương trên* X *thì tập các lớp tương đương* $X/\sim\; = \{\mathrm{cl}(a) \mid a \in X\}$ *là một phân hoạch của* X. *Ngược lại, nếu* $\{X_i\}_{i \in I}$ *là một phép phân hoach tập* X *thì tồn tại duy nhất một quan hệ tương đương trên* X *sao cho mỗi* X_i *là một lớp tương đương.*

Chứng minh. Giả sử $\sim$ là một quan hệ tương đương trên X. Theo Mệnh đề 1.1.7, tập $X/\sim$ các lớp tương đương của X theo quan hệ tương đương $\sim$ làm thành một phép phân hoạch trên X. Ngược lại, giả sử $\{X_i\}_{i \in I}$ là